1η Πρόοδος στο μάθημα 4ου εξαμήνου «Εισαγωγή στις πιθανότητες και την στατιστική»

Τρίτη, 5 Ιουνίου 2007

1. Διαλέγουμε στην τύχη διαδοχικά τρεις βώλους από ένα κουτί που περιέχει έξι κόκκινους, τέσσερις άσπρους και πέντε μπλε. Να βρεθεί η πιθανότητα να είναι οι βώλοι στην σειρά κόκκινος, άσπρος και μπλε όταν διαλέγουμε (α) με επανατοποθέτηση και (β) χωρίς επανατοποθέτηση. (1.0)

(α) $P\left(K_1 \cap A_2 \cap M_3\right) = P\left(K_1\right) \cdot P\left(A_2 \middle| K_1\right) \cdot P\left(M_3 \middle| K_1 \cap A_2\right) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{5}{15} = 0.0356$

τα γεγονότα είναι ανεξάρτητα

(β) $P\left(K_1 \cap A_2 \cap M_3\right) = P\left(K_1\right) \cdot P\left(A_2 \middle| K_1\right) \cdot P\left(M_3 \middle| K_1 \cap A_2\right) = \frac{6}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{5}{13} = 0.0440$

2. Στο πόκερ τραβάμε πέντε τραπουλόχαρτα από τράπουλα με 52 φύλλα. Ποια είναι η πιθανότητα στην πεντάδα να βγουν (α) τρία δεκάρια και δύο βαλέδες, (β) τρία φύλλα από μία σειρά και δύο από μια άλλη, (γ) τουλάχιστον ένας άσσος; (2.0)

(α) $\frac{{}_4C_3 \cdot {}_4C_2}{{}_{52}C_5} = \frac{1}{108290} = 9.2345 \times 10^{-6}$

(β) $\frac{\left(4\,{}_{13}C_3\right) \cdot \left(3\,{}_{13}C_2\right)}{{}_{52}C_5} = \frac{429}{4165} = 0.1030$

υπάρχουν 4 επιλογές για την πρώτη σειρά και 3 για την δεύτερη

(γ) $1 - \frac{{}_{48}C_5}{{}_{52}C_5} = 1 - \frac{35673}{54145} = 0.3412$

3. Κουτί περιέχει τρεις πράσινους, δύο μπλε και τέσσερις κόκκινους βόλους. Διαλέγουμε έναν βώλο στην τύχη και τον επιστρέφουμε στο κουτί. Ποια είναι η πιθανότητα μετά από πέντε επαναλήψεις να έχουμε διαλέξει δύο φορές μπλε και τουλάχιστον μια κόκκινο; (1.5)

$$P\left\{\left(2\Pi \cap 2\mathrm{M} \cap 1\mathrm{K}\right) \cup \left(1\Pi \cap 2\mathrm{M} \cap 2\mathrm{K}\right) \cup \left(0\Pi \cap 2\mathrm{M} \cap 3\mathrm{K}\right)\right\} =$$

$$\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{3}{9}\right)^2\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right) + \frac{5!}{1!2!2!}\left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{5!}{0!2!3!}\left(\frac{3}{9}\right)^0\left(\frac{2}{9}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right)^3 = 0.2141$$

πολυωνυμική για τα τρία ενδεχόμενα

4.Στο μπριτζ μοιράζονται 13 χαρτιά σε τέσσερις παίχτες. Μετά από αρκετά παιχνίδια που αναμένετε να κυμαίνεται ο αριθμός των σπαθιών τουλάχιστον στο 75% των περιπτώσεων; (2.0)

Η κατανομή είναι υπεργεωμετρική [δύο ενδεχόμενα (σπαθιά ή μη-σπαθιά), σε ανεξάρτητες δοκιμές (13 – σε καθέναν μοιράζονται 13 φύλλα), αλλά χωρίς επανατοποθέτηση (δεν είναι δυωνυμική) – ο αριθμός επιτυχιών σε *N*=52 (τα φύλλα της τράπουλας) είναι *α*=13 (αριθμός των σπαθιών)]. Οι στατιστικές είναι:

$$\mu = n\frac{\alpha}{N} = 13\frac{13}{52} = 3.25$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{n\alpha\left(N-a\right)\left(N-n\right)}{N^2\left(N-1\right)}} \; ; \; 1.365$$

Σύμφωνα με την ανισότητα του *Chebychev*: $P\left(\left|X-\mu\right| \le k\sigma\right) \ge 1-\frac{1}{k^2} = 0.75 \Rightarrow k = 2$. Επομένως,

$\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma \Rightarrow 0.52 \le X \le 5.98$.

Άρα τα σπαθιά σε ένα δεδομένο χέρι είναι μεταξύ ένα και έξι.

5. Ένας πλανόδιος πωλητής λουλουδιών πουλάει κατά μέσο όρο μια ορτανσία σε μια συγκεκριμένη διαδρομή σε μια συγκεκριμένη ημέρα. Ποια είναι η πιθανότητα να πουλήσει ζυγό αριθμό ορτανσιών; (Υποθέστε κατανομή *Poisson*.) (2.0)

Η κατανομή *Poisson* δίνεται από τον τύπο $\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$, όπου λt η μέση τιμή, έστω, στην γενική περίπτωση, *m*. Αθροίζοντας σε όλα τα *k*:

$$\sum_k \frac{e^{-m}m^k}{k!} = 1 = e^{-m}e^m = e^{-m}\left(1+\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}+\frac{m^3}{3!}+\cdots\right). \quad (1)$$

Όμως, $$e^{-2m} = e^{-m}e^{-m} = e^{-m}\left(1-\frac{m}{1!}+\frac{m^2}{2!}-\frac{m^3}{3!}+\cdots\right). \qquad (2)$$

Το άθροισμα των (1) και (2) δίνουν τον διπλάσιο αριθμό των ζυγών όρων στην κατανομή *Poisson*. Άρα:

P(*k* ζυγός) = $\frac{1+2e^{-2m}}{2}$, και για *m*=1, *P*(*k* ζυγός) = 0.568

6. Έστω ότι η βαθμολόγηση στις Πανελλαδικές γίνεται σε ακέραιες μονάδες από μηδέν έως 200. Αν ο μέσος όρος στα Μαθηματικά ήταν 151 μονάδες και η τυπική απόκλιση 15 μονάδες και δεχθούμε ότι οι βαθμοί ακολουθούν κανονική κατανομή, υπολογίστε το ποσοστό των εξεταστέων που πήραν (α) από 120 έως 155 μονάδες και (β) περισσότερες από 185 μονάδες. (1.5)

Λόγω της διόρθωσης συνέχειας θα πρέπει οι ακέραιοι να μετατραπούν σε διαστήματα, π.χ., το «>120» μεταφράζεται στον συνεχή χώρο σε «>119.5» και το «<155» σε «<155.5» . Έτσι έχουμε:

(α) $P(120<X<155) = P(119.5<X<155.5)$. Για να αναζητήσουμε την πιθανότητα μέσα από τους πίνακες της τυποποιημένης κανονικής κατανομής πρέπει να κάνουμε την μετατροπή σε:

$$P\left(\frac{119.5-151}{15} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{155.5-151}{15}\right) = P(-2.10<z<0.30) = F(0.30) - F(-2.10) =$$

$F(0.30) - [1- - F(2.10)] = 0.6179 - [1 - 0.9821] = 0.6000.$

(β) $P(X>185.5) = 1 - P(X<185.5) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{185.5-151}{15}\right) = 1 - P(z<2.30) = 1 -$

$F(2.30) = 1 - 0.9893 = 0.0107$