

Το «άτιμο» quiz Τετάρτη, 3 Μαΐου 2006

Σε έναν πληθυσμό γίνονται έξι μετρήσεις μιας στατιστικής. Ποια είναι η πιθανότητα τα δύο τελευταία αποτελέσματα να είναι μικρότερα από τα τέσσερα πρώτα;

Το quiz χρησιμοποιεί και τις γνώσεις σας από πιθανότητες, επομένως θεωρήθηκε άτιμο και εκτός βαθμολόγησης. Προκύπτει όμως το εκπληκτικό αποτέλεσμα ότι χωρίς καμία πληροφορία για την κατανομή του πληθυσμού μπορούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά την παραπάνω πιθανότητα.

Έστω ότι ο πληθυσμός έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x)$ και ότι u είναι μια τιμή της στατιστικής που μετράμε. Η **πιθανότητα τρία από τέσσερα να είναι μεγαλύτερα από u** και **ένα μεταξύ u και $u+du$** (δεδομένου ότι μπορεί να έχουμε οποιονδήποτε συνδυασμό τριών από τα τέσσερα και ότι τα ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα) είναι

$${}_4C_3 \left[\int_u^{+\infty} f(x) dx \right]^3 f(u) du ,$$

[όπου τα τμήματα του τύπου είναι χρωματισμένα ανάλογα με την φράση στην οποία αντιστοιχούν] ενώ η πιθανότητα τα δύο τελευταία να είναι μικρότερα του u είναι

$$\left[\int_{-\infty}^u f(x) dx \right]^2 .$$

Άρα η πιθανότητα που αναζητάμε (εφόσον το u μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή, από $-\infty$ έως $+\infty$) είναι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} {}_4C_3 \left[\int_u^{+\infty} f(x) dx \right]^3 f(u) du \left[\int_{-\infty}^u f(x) dx \right]^2 . \quad (1)$$

Χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητών

$$v = \int_{-\infty}^u f(x) dx ,$$

[δηλ., το v είναι μια συνάρτηση του u , με $dv = f(u)du$]

οπότε $v = 1$ για $u = +\infty$ και $v = 0$ για $u = -\infty$, και αντικαθιστούμε στην (1):

$${}_4C_3 \int_0^1 v^2 (1-v)^3 dv = \frac{1}{15} .$$

Όχι και τόσο άτιμο, τελικά.