"Epistemological Letters" are not a scientific journal in the ordinary sense. They want to create a basis for an open and informal discussion allowing confrontation and ripening of ideas before publishing in some adequate journal.

Les "Lettres épistémologiques" ne voudraient pas être un périodique comme les autres. Elles désirent instaurer un mode de discussion libre et informel, permettant de confronter les idées, de les faire mûrir, avant leur éventuelle publication définitive dans une véritable revue.

Die "Epistemologischen Briefe" sollten keine wissenschaftliche Zeitschrift im üblichen Sinne sein. Sie möchten eher Gelegenheit bieten, frei und formlos Ideen auszutauschen und reifen zu lassen, welche dann in einer eigentlichen Fachzeitschrift veröffentlicht werden können.

Contributions, remarks, objections, answers should be sent to :

Les contributions, remarques, objections, réponses sont à envoyer à :

Beiträge, Bemerkungen, Einwände, Antworten sind zu richten an :

ASSOCIATION FERDINAND GONSETH
CASE POSTALE 1081
CH - 2501 BIENNE.

Nouvelle adresse du secrétaire :

François Bonsack
Av. de la Gare 27
CH - 1007 Lausanne.

Association F. Gonseth
INSTITUT DE LA METHODE

EPISTEMOLOGICAL LETTERS

LETTRES EPISTEMOLOGIQUES

EPISTEMOLOGISCHE BRIEFE

Hidden Variables and Quantum Uncertainty
(Written Symposium, 24th Issue)

Variables cachées et indéterminisme quantique
(Symposium écrit, 24ème livraison)

Verborgene Parameter und Quanten-Unbestimmtheit
(Schriftliches Symposium, 24.Heft)

October 1979 Octobre

Contents — Sommaire — Inhalt

N.Hadjisavvas - Non-conservation du moment cinétique total, selon la théorie quantique des mesures, lors d'une mesure de spin sur un système de deux systèmes

Dans une communication récente[1] F.Selleri a proposé un procédé qui permettrait la transmission de signaux instantanément et à une distance quelconque. Le raisonnement était fondé sur l'étude d'un système constitué d'une paire de particules de spin 1/2 couplées dans un état singulet et d'un appareil capable de mesurer le spin de l'une des particules. Une hypothèse nécessaire était que le moment cinétique total de l'ensemble reste constant pendant l'interaction appareil-particules. En effet, l'ensemble étant supposé isolé, l'hypothèse paraît au premier abord tout à fait justifiée.

Néanmoins, nous avons eu la patience d'examiner si cette hypothèse est compatible avec les axiomes de la Mécanique Quantique. Nous avons trouvé que non: le moment cinétique total ne peut pas se conserver pendant l'interaction.

Ce résultat est comparable aux résultats analogues trouvés par Wigner (Z.Phys.133, 101, 1952) et Araki et Yanase (Phys.Rev.120, n.2, 622, 1960) pour des grandeurs additives. Il s'en différencie en ce que le moment cinétique total J^2_{tot} n'est pas une grandeur additive et que la démonstration de sa non-conservation repose sur des hypothèses plus faibles.

La signification profonde de cette non-conservation pourrait être examinée ultérieurement. Nous nous contentons ici d'en donner la démonstration.

Nous allons donc démontrer que le moment cinétique total J^2_{tot} ne peut être conservé pendant l'évolution du système composé par la paire des deux particules (α,β) et l'appareil A, mesurant le spin de la particule α.

L'espace de Hilbert qui décrit l'ensemble est le produit tensoriel $H = H_\alpha \otimes H_\beta \otimes H_A$ des espaces de Hilbert qui correspondent à chacun des constituants. En plus, l'espace de Hilbert de chaque particule dans la paire (α,β) est le produit tensoriel de l'espace de spin et de l'espace des variables à correspondant classique. Par conséquent, H s'écrit

$$\begin{aligned} H &= H_{s\alpha} \otimes H_{cl\alpha} \otimes H_{s\beta} \otimes H_{cl\beta} \otimes H_A \\ &= H_{s\alpha} \otimes H_{s\beta} \otimes (H_{cl\alpha} \otimes H_{cl\beta} \otimes H_A) \end{aligned} \qquad (1)$$

où $H_{s\alpha}$, $H_{s\beta}$ sont les espaces de spin et $H_{cl\alpha}$, $H_{cl\beta}$ les espaces des variables à correspondant classique. Donc, H s'écrit comme produit tensoriel de deux espaces de spin et d'un troisième espace $H_{cl\alpha} \otimes H_{cl\beta} \otimes H_A$.

Soit $|A\rangle$ l'état de l'appareil avant la mesure. $|A\rangle$ sera l'un des états quantiques possibles de l'appareil qui correspondent à un état macroscopique "neutre" (appareil prêt à mesurer). On supposera que $|A\rangle$ est un état pur, mais la démonstration que nous faisons tient même si $|A\rangle$ est un mélange.

Supposons que la paire (α,β) a été préparée de façon que son état de spin est $|+-\rangle$. Alors son état total aura la forme $|+-\rangle|\alpha\beta\rangle$ où $|\alpha\beta\rangle \in H_{cl\alpha} \otimes H_{cl\beta}$. L'état total du système composé par α,β et A est, avant la mesure: $|+-\rangle|\alpha\beta\rangle|A\rangle = |+-a\rangle$ où nous avons mis, pour simplifier, $|a\rangle = |\alpha\beta\rangle|A\rangle \in H_{cl\alpha} \otimes H_{cl\beta} \otimes H_A$ (donc $|a\rangle$ dépend de toutes les variables de l'appareil A et des variables de (α,β) sauf le spin). L'état de spin de (α,β) après la mesure sera de nouveau $|+-\rangle$, puisque A mesure le spin S_z. Alors, étant donné que l'opérateur d'évolution transforme un état pur en état pur, l'état de (α,β,A) après la mesure aura la forme $|+-a^+\rangle$ où a^+ correspond, macroscopiquement, à une certaine indication du "compteur" ou de "l'aiguille" de l'appareil. Nous avons donc le schéma d'évolution:

$$|+-a\rangle \longrightarrow |+-a^+\rangle \qquad (2)$$

et, par analogie,

$$|-+a\rangle \longrightarrow |-+a^-\rangle \qquad (3)$$

Donc, si l'état de spin de (α,β) était $\psi = \frac{|+-\rangle - |-+\rangle}{\sqrt{2}}$, avant la mesure, l'état $|a\rangle$ étant toujours le même, la linéarité de l'opérateur d'évolution conduit à

$$|\psi a\rangle \longrightarrow \frac{|+-a^+\rangle - |-+a^-\rangle}{\sqrt{2}} \qquad (4)$$

Pour montrer que J^2_{tot} ne peut pas être toujours conservé, nous allons supposer qu'il se conserve pendant les évolutions (2) et (3) et nous montrerons qu'il ne se conserve pas pendant l'évolution (4). Pour cela, il suffit de calculer la valeur moyenne de J^2_{tot} avant et après la mesure, pour chacune des trois évolutions. On a

$$J^2_{tot} = (\vec{J} + \vec{J}')^2 = J^2 + J'^2 + 2J_xJ'_x + 2J_yJ'_y + 2J_zJ'_z \qquad (5)$$

où les opérateurs non primés (sauf J^2_{tot}) correspondent à espace de spin $H_{s\alpha}\otimes H_{s\beta}$, tandis que les opérateurs primés correspondent à l'espace $H_{cl\alpha}\otimes H_{cl\beta}\otimes H_\Lambda$. Examinons d'abord l'évolution (2). La valeur moyenne de J^2_{tot} avant la mesure était:

$$\langle + - a|J^2_{tot}|+ - a\rangle$$
$$= \langle + - a|J^2|+ - a\rangle + \langle + - a|J'^2|+ - a\rangle + 2\langle + - a|J_x J'_x|+ - a\rangle + \ldots$$
$$= \langle + -|J^2|+ -\rangle + \langle a|J'^2|a\rangle + 2\langle + -|J_x|+ -\rangle\langle a|J'_x|a\rangle + \ldots \tag{6}$$

$$\text{Or}\quad J_x|+ -\rangle = (S_{\alpha x} + S_{\beta x})|+ -\rangle = \hbar\frac{|- -\rangle + |+ +\rangle}{2} \tag{7}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{donc} & \langle + -|J_x|+ -\rangle = 0\\ \text{et de la même façon} & \langle + -|J_y|+ -\rangle = 0\end{array}\right\} \tag{8}$$

$$\text{Et encore}\quad J_z|+ -\rangle = (S_{\alpha z} + S_{\beta z})|+ -\rangle = \frac{\hbar}{2}|+ -\rangle - \frac{\hbar}{2}|+ -\rangle = 0 \tag{9}$$

En introduisant (8), (9) dans (6) on trouve:

$$\langle + - a|J^2_{tot}|+ - a\rangle = \langle + -|J^2|+ -\rangle + \langle a|J'^2|a\rangle \tag{10}$$

De même, l'examen de la valeur moyenne de J^2_{tot} après la mesure décrite par (2) donne:

$$\langle + - a^+|J^2_{tot}|+ - a^+\rangle = \langle + -|J^2|+ -\rangle + \langle a^+|J'^2|a^+\rangle \tag{11}$$

Puisque J^2_{tot} se conserve par hypothèse, on tire de (10), (11):

$$\langle a|J'^2|a\rangle = \langle a^+|J'^2|a^+\rangle \tag{12}$$

Procédant de la même façon, nous étudions l'évolution (3). On trouve:

$$\langle - + a|J^2_{tot}|- + a\rangle = \langle - +|J^2|- +\rangle + \langle a|J'^2|a\rangle \tag{13}$$
$$\langle - + a^-|J^2_{tot}|- + a^-\rangle = \langle - +|J^2|- +\rangle + \langle a^-|J'^2|a^-\rangle \tag{14}$$
$$\langle a|J'^2|a\rangle = \langle a^-|J'^2|a^-\rangle \tag{15}$$

Passons maintenant à l'évolution (4). La valeur moyenne de J^2_{tot} avant la mesure était:

$$\langle\psi a|J^2_{tot}|\psi a\rangle$$
$$= \langle\psi|J^2|\psi\rangle + \langle a|J'^2|a\rangle + 2\langle\psi|J_x|\psi\rangle\langle a|J'_x|a\rangle + \ldots \tag{16}$$

Or $J^2|\psi\rangle = 0$ ($|\psi\rangle$ étant l'état singulet) . (17)

$$\text{Donc}\quad J^2_x|\psi\rangle + J_y^2|\psi\rangle + J_z^2|\psi\rangle = 0 \Rightarrow$$
$$\langle\psi|J_x^2|\psi\rangle + \langle\psi|J_y^2|\psi\rangle + \langle\psi|J_z^2|\psi\rangle = 0 \Rightarrow$$
$$\langle J_x\psi|J_x\psi\rangle + \langle J_y\psi|J_y\psi\rangle + \langle J_z\psi|J_z\psi\rangle = 0 \Rightarrow$$
$$J_x\psi = J_y\psi = J_z\psi = 0 \tag{18}$$

Alors l'égalité (16) devient, compte tenu des (17), (18):

$$\langle\psi a|J^2_{tot}|\psi a\rangle = \langle a|J'^2|a\rangle \tag{19}$$

La valeur moyenne de J^2_{tot} après la mesure sera:

$$C =_{df.} \left(\frac{\langle + - a^+| - \langle - + a^-|}{\sqrt{2}}\right) J^2_{tot} \left(\frac{|+ - a^+\rangle - |- + a^-\rangle}{\sqrt{2}}\right) \tag{20}$$

$$\text{Donc}\quad C = \frac{\langle + - a^+|J^2_{tot}|+ - a^+\rangle}{2} + \frac{\langle - + a^-|J^2_{tot}|- + a^-\rangle}{2}$$
$$- \frac{\langle + - a^+|J^2_{tot}|- + a^-\rangle}{2} - \frac{\langle - + a^-|J^2_{tot}|+ - a^+\rangle}{2} \tag{21}$$

Les deux premiers termes de (21) sont donnés dans (11) et (14). Calculons le troisième:

$$\langle + - a^+|J^2_{tot}|- + a^-\rangle$$
$$= \langle + - a^+|J^2|- + a^-\rangle + \langle + - a^+|J'^2|- + a^-\rangle$$
$$+ 2\langle + - a^+|J_x J_x'|- + a^-\rangle + \ldots$$
$$= \langle + -|J^2|- +\rangle\langle a^+|a^-\rangle + \langle + -|- +\rangle\langle a^+|J'^2|a^-\rangle$$
$$+ 2\langle + -|J_x|- +\rangle\langle a^+|J_x'|a^-\rangle + \ldots \tag{22}$$

Il est facile à vérifier que:

$$\langle + -|J^2|- +\rangle = \langle + -|J^2|+ -\rangle = \langle - +|J^2|- +\rangle = \hbar^2 \tag{23}$$

$$\left.\begin{array}{l}\langle + -|- +\rangle = 0\\ \langle + -|J_x|- +\rangle = \langle + -|J_y|- +\rangle = \langle + -|J_z|- +\rangle = 0\end{array}\right\} \tag{24}$$

... conséquent, (22) devient, en vertu des (23), (24):

$$\langle +-a^+ | J^2_{tot} | -+a^- \rangle = \hbar^2 \langle a^+ | a^- \rangle \qquad (25)$$

Or, étant donné que les états a^+, a^- sont macroscopiquement discernables (ils correspondent à des positions différentes de l'aiguille de l'appareil), on doit avoir

$$\langle a^+ | a^- \rangle = 0 \qquad (26)$$

et par conséquent, (25) donne:

$$\langle +-a^+ | J^2_{tot} | -+a^- \rangle = \langle -+a^- | J^2_{tot} | +-a^+ \rangle = 0 \qquad (27)$$

En introduisant (27), (11), (14) dans (21) et tenant compte de (23), (12), (15), on trouve:

$$C = \hbar^2 + \frac{\langle a^+ | J'^2 | a^+ \rangle}{2} + \frac{\langle a^- | J'^2 | a^- \rangle}{2}$$
$$= \hbar^2 + \langle a | J^2 | a \rangle \qquad (28)$$

En comparant (28) avec (19) et tenant compte de la définition de C (relation (20)) on voit que J^2_{tot} ne se conserve pas pendant l'évolution (4). C.q.f.d.

Remarques:

(a) L'état final pendant l'évolution (4) du système (α, β, Λ) est l'état avant l'observation de la valeur enregistrée par l'appareil. Cette observation conduira à la réduction du vecteur d'état:

$$\frac{|+-a^+\rangle - |-+a^-\rangle}{\sqrt{2}} \rightarrow \begin{cases} |+-a^+\rangle \\ |-+a^-\rangle \end{cases} \text{ selon le cas.} \qquad (29)$$

La moyenne de J^2_{tot} sera donc, après la réduction (relations 11, 12, 14, 15): $\langle J^2_{tot} \rangle = \hbar^2 + \langle a | J'^2 | a \rangle$ (30)

La comparaison avec (28) montre que la prise de conscience par l'observateur de la valeur enregistrée ne change pas J^2_{tot}. Il s'ensuit que pendant le processus global de l'observation:

$$|\psi a\rangle \rightarrow \begin{cases} |+-a^+\rangle \\ |-+a^-\rangle \end{cases}$$

le moment cinétique n'est pas conservé.

(b) Par extrême souci de rigueur, notons qu'une objection possible à la démonstration exposée ci-dessus est la suivante: Compte tenu de l'ordre de grandeur (la contribution de l'appareil à la valeur de J^2_{tot} est immense, tandis que la contribution de (α, β) est d'ordre microscopique) il ne faut pas, pendant l'examen de la conservation de J^2_{tot}, faire des approximations. Or, pour achever la démonstration, nous avons fait l'hypothèse (hypothèse qu'on fait toujours dans la théorie de la mesure) que $\langle a^+ | a^- \rangle = 0$. Cependant, la discernabilité macroscopique de deux états a^+, a^- n'entraîne pas nécessairement que $\langle a^+ | a^- \rangle$ est rigoureusement égal à zéro. Elle entraîne seulement que sa valeur est si petite qu'elle n'implique pas des effets observables[2].

Cependant, la démonstration tient même sans l'hypothèse $\langle a^+ | a^- \rangle = 0$. En effet, de la relation (25) il découle:

$$\langle -+a^- | J^2_{tot} | +-a^+ \rangle = \hbar^2 \langle a^- | a^- \rangle \qquad (31)$$

L'introduction de (31), (25), (11), (14) dans (21) donne:

$$C = \frac{\langle +- | J^2 | +- \rangle}{2} + \frac{\langle a^+ | J'^2 | a^+ \rangle}{2} + \frac{\langle -+ | J^2 | -+ \rangle}{2}$$
$$+ \frac{\langle a^- | J'^2 | a^- \rangle}{2} - \frac{\hbar^2}{2} \left(\langle a^+ | a^- \rangle + \langle a^- | a^+ \rangle \right)$$

ou encore, en vertu des (12), (15), (23):

$$C = \hbar^2 + \langle a | J'^2 | a \rangle - \hbar^2 \left(\frac{\langle a^+ | a^- \rangle + \langle a^- | a^+ \rangle}{2} \right) \qquad (32)$$

Pour que la valeur moyenne de J^2_{tot} se conserve pendant l'évolution (4) il faut, compte tenu des relations (32), (19) et de la définition de C (20) que l'égalité

$$\hbar^2 + \langle a | J'^2 | a \rangle - \hbar^2 \left(\frac{\langle a^+ | a^- \rangle + \langle a^- | a^+ \rangle}{2} \right) = \langle a | J'^2 | a \rangle$$

soit valable. Ou, ce qui revient au même,

$$\langle a^+ | a^- \rangle + \langle a^- | a^+ \rangle = 2 \iff$$
$$\mathrm{Re}\,(\langle a^+ | a^- \rangle) = 1 \qquad (33)$$

Puisque $\langle a^+ | a^- \rangle \leq \| a^+ \| \, \| a^- \| = 1$ (34)

et que $\mathrm{Re}\,(\langle a^+ | a^- \rangle) \leq |\langle a^+ | a^- \rangle|$,

il en découle que $I_m \langle a^+ | a^- \rangle = 0 \Rightarrow \langle a^+ | a^- \rangle = 1$.
Or on sait que l'inégalité de Schwartz (39) ne devient égalité que si $| a^+ \rangle$ est un multiple de $| a^- \rangle$, c'est-à-dire si $| a^+ \rangle$ et $| a^- \rangle$ sont des états identiques, ce qui est certainement faux. Donc nous avons prouvé que J^2_{tot} ne se conserve pas, même sans l'hypothèse $\langle a^+ | a^- \rangle = 0$.

Remerciements:

Je tiens à remercier le Professeur M. Mugur-Schächter pour les discussions fructueuses que nous avons eues concernant ce travail.

Nicolas Hadjisavvas,
Laboratoire de Mécanique Quantique
de l'Université de Reims.

Références

(1) Collège de France: Table ronde à l'occasion de l'année Einstein, Juin 1979, voir texte dans ce même fascicule.

(2) Voir, par exemple, l'étude de la théorie de la mesure dans: D. Bohm, "Quantum Theory", Prentice-Hall Inc. 1966, p.600.